Mathe Artikel

Ein kleiner Beitrag zur Mathematik: Die Matrixdivision

Eine etwas andere Sicht auf die Lösung von Gleichungssystemen

Sergej Oks

Mathe Artikel

Ein kleiner Beitrag zur Mathematik: Die Matrixdivision

Eine etwas andere Sicht auf die Lösung von Gleichungssystemen

Sergej Oks

5. März 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Intention **1**

2 Herleitung der Matrixdivision **3**
2.1 Vorabbeispiel 4
2.2 Allgemeine Matrixdivision 7
2.3 Behandlung rechteckiger Matrizen 11

3 Fazit **13**

4 Anhang **15**
4.1 Matlab-Code: Matrixdivision (original) 15
4.2 Matlab-Code: Matrixdivision (optimiert) 16

Literatur **17**

1 Intention

„Du wolltest doch Algebra,
da hast du den Salat.“

Jules Verne

Eine sogenannte Matrixdivision soll im Allgemeinen nicht existieren. Jedoch weiß jeder, dass ein Gleichungssystem trotzdem lösbar ist, beispielsweise durch Anwenden des Gaußschen Eliminationsverfahrens. Man schreibt solch eine Problemstellung auch gern so um, dass man durch Invertieren an die Lösung gelangt.

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{i \times j}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{j} \text{ und } \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{i} \tag{1.1}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{b} \tag{1.2}$$

Von den Dimensionen i und j (und dem Rang von $\boldsymbol{A}$) hängt ab, wie genau die Lösung am Ende aussieht, aber das nur am Rande. Diese Arbeit soll sich auf quadratische Matrizen (mit vollem Rang) konzentrieren und durch Änderung des Blickwinkels einen Ansatz liefern, die Matrixdivision zu definieren und somit deren Existenz nachzuweisen.

2 Herleitung der Matrixdivision

Nach Einsteinscher Summenkonvention wird bei der Multiplikation von Matrizen (oder Tensoren) über gleichnamige Indizes summiert. Somit kann auf das Summenzeichen verzichtet werden, was der Übersicht über Gleichungen sehr förderlich ist. Im Folgenden wird diese Konvention verwendet und darauf beruhend eine Inversion durchgeführt. Im wesentlichen kann man das Verfahren der Matrixmultiplikation in drei Bestandteile aufgliedern:

- Multiplikation
- Addition (Summe)
- Aufeinander folgend (sukzessiv)

Die Gleichung 1.1 kann somit wie folgt dargestellt werden:

$$\sum_j A_{ij} \cdot x_j = b_i \qquad \Rightarrow \qquad A_{ij} \cdot x_j = b_i \qquad \text{wobei} \qquad i, j \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

Wenn man nun die Gleichung nach x_j auflösen möchte, lässt es sich mit der Einsteinschen Summenkonvention recht einfach hinschreiben.

$$x_j = b_i / A_{ij} \tag{2.2}$$

Die Darstellung einer Inversion, wie in Gleichung 1.2, ist somit unnötig. Es bleibt lediglich die Frage, wie die Interpretation und die hier anzuwendenden mathematischen Regeln lauten. Die These dieser Arbeit ist, dass das Verfahren der Matrixdivision, also die Umkehrung der Matrixmultiplikation, wie folgt aufgebaut sein muss:

- Division
- Subtraktion (Differenz)
- Ineinander verschachtelt (rekursiv)

Gleichung 2.2 könnte man somit wie folgt darstellen,

$$x_j = b_i / A_{ij} \qquad \Rightarrow \qquad x_j = \bigtriangleup_i b_i / A_{ij} \tag{2.3}$$

wobei das Δ-Zeichen hier für Differenz stehen soll. Da man eine Differenz immer nur zwischen zwei Gliedern einer Gleichung bilden kann, ergibt sich automatisch eine in sich verschachtelte Vorgehensweise. Im nachfolgenden Beispiel soll der Ablauf verdeutlicht werden.

2.1 Vorabbeispiel

In einem 3×3 Beispiel soll gezeigt werden, wie aus der Umkehrung der Matrixmultiplikation die Matrixdivision entsteht. Bei der Matrixmultiplikation wird als erstes eine Multiplikation der Glieder A_{ij} mit x_j vorgenommen, danach erfolgt die Addition bzw. Summation und dies für jede Gleichung aufeinanderfolgend. Es wird nachfolgend explizit das Summenzeichen dargestellt, um zu verdeutlichen, dass es in der Matrixmultiplikation implizit immer enthalten ist.

$$\sum_{Spalten} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} A_{11} \cdot x_1 + A_{12} \cdot x_2 + A_{13} \cdot x_3 = b_1 \\ A_{21} \cdot x_1 + A_{22} \cdot x_2 + A_{23} \cdot x_3 = b_2 \\ A_{31} \cdot x_1 + A_{32} \cdot x_2 + A_{33} \cdot x_3 = b_3 \end{array} \tag{2.4}$$

Diese Vorgehensweise erscheint simpel, jedoch ist es wichtig sich nochmal zu vergegenwärtigen, dass sie in unseren mathematischen Regeln begründet ist, einschließlich der Punkt- vor Strichrechnung. Um es noch einmal klarer hervorzuheben, zuerst wird die Zeile $i = 1$ behandelt,

$$\sum_{Spalten} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = b_1 \quad \Leftrightarrow \quad A_{11} \cdot x_1 + A_{12} \cdot x_2 + A_{13} \cdot x_3 = b_1 \tag{2.5}$$

indem die Glieder A_{1j} mit x_j multipliziert und erst danach summiert werden. Der gleichnamige Index, über den summiert wird, lautet hier j. Darauffolgend geschieht dasselbe mit den Zeilen $i = 2$ und $i = 3$.

Während man beim Multiplizieren über gleichnamige Indizes summiert, soll nun beim Dividieren über gleichnamige Indizes subtrahiert bzw. „differenziert“ werden. Da bei der Umkehrung der gleichnamige Index von j zu i wechselt (siehe Gleichung 2.2), entwickelt man das Gleichungssystem nun spaltenweise. Das 3×3 Beispiel muss also wie folgt aussehen.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bigtriangleup_{Zeilen} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \bigtriangleup_{i} \frac{b_i}{\begin{bmatrix} A_{i1} & A_{i2} & A_{i3} \end{bmatrix}} \tag{2.6}$$

Um x_1 zu ermitteln, muss man das Gleichungssystem so entwickeln, dass die Spalte $j = 1$ bis zuletzt übrig bleibt. Man beachtet die Punkt vor Strich Regel und teilt z.B. die Spalten (bzw. Vektoren) b_i, A_{i1} und A_{i2} zuerst durch A_{i3}.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{\bigtriangleup_{Zeilen} \begin{bmatrix} b_1/A_{13} \\ b_2/A_{23} \\ b_3/A_{33} \end{bmatrix}}{\bigtriangleup_{Zeilen} \begin{bmatrix} A_{11}/A_{13} & A_{12}/A_{13} \\ A_{21}/A_{23} & A_{22}/A_{23} \\ A_{31}/A_{33} & A_{32}/A_{33} \end{bmatrix}} = \frac{\bigtriangleup_{i} b_i/A_{i3}}{\bigtriangleup_{i} \begin{bmatrix} A_{i1}/A_{i3} & A_{i2}/A_{i3} \end{bmatrix}} \tag{2.7}$$

Alternativ hätte man auch b_i, A_{i1} und A_{i3} durch A_{i2} teilen können, nur durch A_{i1} darf

man bis zuletzt nicht teilen. Als Nächstes bildet man die Differenzen zwischen Zeilen $i = 1$ und $i = 2$ sowie zwischen Zeilen $i = 2$ und $i = 3$, sodass ein reduziertes Gleichungssystem entsteht.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \bigtriangleup_{Zeilen} \frac{\begin{bmatrix} b_2/A_{23} - b_1/A_{13} \\ b_3/A_{33} - b_2/A_{23} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A_{21}/A_{23} - A_{11}/A_{13} & A_{22}/A_{23} - A_{12}/A_{13} \\ A_{31}/A_{33} - A_{21}/A_{23} & A_{32}/A_{33} - A_{22}/A_{23} \end{bmatrix}} = \bigtriangleup_{i} \frac{b'_i}{\begin{bmatrix} A'_{i1} & A'_{i2} \end{bmatrix}} \tag{2.8}$$

Diesen Vorgang wiederholt man solange, bis am Ende nur noch ein Skalar übrig bleibt. Hier kann man die ineinander verschachtelte Berechnungsweise erkennen, durch welche das Gleichungssystem immer wieder in eine stärker reduzierte Form umgewandelt wird. Für dieses Beispiel bedeutet dies, man teilt die neu entstandenen b'_i und A'_{i1} durch das neue A'_{i2}. Die Spalte $j = 1$ bleibt wieder im Zähler.

$$x_1 = \frac{\bigtriangleup_{Zeilen} \begin{bmatrix} (b_2/A_{23} - b_1/A_{13})/(A_{22}/A_{23} - A_{12}/A_{13}) \\ (b_3/A_{33} - b_2/A_{23})/(A_{32}/A_{33} - A_{22}/A_{23}) \end{bmatrix}}{\bigtriangleup_{Zeilen} \begin{bmatrix} (A_{21}/A_{23} - A_{11}/A_{13})/(A_{22}/A_{23} - A_{12}/A_{13}) \\ (A_{31}/A_{33} - A_{21}/A_{23})/(A_{32}/A_{33} - A_{22}/A_{23}) \end{bmatrix}} = \frac{\bigtriangleup_{i} b'_i/A'_{i2}}{\bigtriangleup_{i} A'_{i1}/A'_{i2}} \tag{2.9}$$

Dann bildet man erneut die Differenz zwischen den übrig gebliebenen Zeilen $i = 1$ und $i = 2$ und erhält das Ergebnis.

$$x_1 = \frac{(b_3/A_{33} - b_2/A_{23})/(A_{32}/A_{33} - A_{22}/A_{23}) - (b_2/A_{23} - b_1/A_{13})/(A_{22}/A_{23} - A_{12}/A_{13})}{(A_{31}/A_{33} - A_{21}/A_{23})/(A_{32}/A_{33} - A_{22}/A_{23}) - (A_{21}/A_{23} - A_{11}/A_{13})/(A_{22}/A_{23} - A_{12}/A_{13})} \tag{2.10}$$

Wie oben bereits erwähnt, ist die Reihenfolge der Spalten, durch die man teilt, im Prinzip beliebig, solange man bis zum Schluss die Spalte j zum gesuchten x_j außen vor lässt. Das kann man am Vektor $\boldsymbol{x}$ gut ablesen, worin die übrig gebliebenen x_j die noch möglichen Pfade anzeigen. Konkret bedeutet dies, dass die Gleichung 2.6 auch wie folgt aufgelöst werden kann.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{\bigtriangleup_{Zeilen} \begin{bmatrix} b_1/A_{12} \\ b_2/A_{22} \\ b_3/A_{32} \end{bmatrix}}{\bigtriangleup_{Zeilen} \begin{bmatrix} A_{11}/A_{12} & A_{13}/A_{12} \\ A_{21}/A_{22} & A_{23}/A_{22} \\ A_{31}/A_{32} & A_{33}/A_{32} \end{bmatrix}} = \frac{\bigtriangleup_{i} b_i/A_{i2}}{\bigtriangleup_{i} \begin{bmatrix} A_{i1}/A_{i2} & A_{i3}/A_{i2} \end{bmatrix}} \tag{2.11}$$

Man teilt also zuerst durch die Spalte $j = 2$ und bildet dann die Differenzen über die Zeilen.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \bigtriangleup_{Zeilen} \frac{\begin{bmatrix} b_2/A_{22} - b_1/A_{12} \\ b_3/A_{32} - b_2/A_{22} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A_{21}/A_{22} - A_{11}/A_{12} & A_{23}/A_{22} - A_{13}/A_{12} \\ A_{31}/A_{32} - A_{21}/A_{22} & A_{33}/A_{32} - A_{23}/A_{22} \end{bmatrix}} = \bigtriangleup_{i} \frac{b'_i}{\begin{bmatrix} A'_{i1} & A'_{i2} \end{bmatrix}} \tag{2.12}$$

Danach wiederholt man die Teilung durch die neu entstandene Spalte $j = 2$,

$$x_1 = \frac{\bigtriangleup\limits_{Zeilen} \begin{bmatrix} (b_2/A_{22} - b_1/A_{12})/(A_{23}/A_{22} - A_{13}/A_{12}) \\ (b_3/A_{32} - b_2/A_{22})/(A_{33}/A_{32} - A_{23}/A_{22}) \end{bmatrix}}{\bigtriangleup\limits_{Zeilen} \begin{bmatrix} (A_{21}/A_{22} - A_{11}/A_{12})/(A_{23}/A_{22} - A_{13}/A_{12}) \\ (A_{31}/A_{32} - A_{21}/A_{22})/(A_{33}/A_{32} - A_{23}/A_{22}) \end{bmatrix}} = \frac{\bigtriangleup\limits_{i} b'_i/A'_{i2}}{\bigtriangleup\limits_{i} A'_{i1}/A'_{i2}} \tag{2.13}$$

bildet wieder die Differenzen und erhält für x_1 einen alternativen Ausdruck,

$$x_1 = \frac{(b_3/A_{32} - b_2/A_{22})/(A_{33}/A_{32} - A_{23}/A_{22}) - (b_2/A_{22} - b_1/A_{12})/(A_{23}/A_{22} - A_{13}/A_{12})}{(A_{31}/A_{32} - A_{21}/A_{22})/(A_{33}/A_{32} - A_{23}/A_{22}) - (A_{21}/A_{22} - A_{11}/A_{12})/(A_{23}/A_{22} - A_{13}/A_{12})} \tag{2.14}$$

welcher dasselbe Ergebnis widerspiegelt, wie die Gleichung 2.10. Um die anderen x_j zu erhalten kann man z.B. die in der Gleichung 2.8 entstandenen b'_i und A'_{i2} durch A'_{i1} teilen,

$$x_2 = \frac{\bigtriangleup\limits_{Zeilen} \begin{bmatrix} (b_2/A_{23} - b_1/A_{13})/(A_{21}/A_{23} - A_{11}/A_{13}) \\ (b_3/A_{33} - b_2/A_{23})/(A_{31}/A_{33} - A_{21}/A_{23}) \end{bmatrix}}{\bigtriangleup\limits_{Zeilen} \begin{bmatrix} (A_{22}/A_{23} - A_{12}/A_{13})/(A_{21}/A_{23} - A_{11}/A_{13}) \\ (A_{32}/A_{33} - A_{22}/A_{23})/(A_{31}/A_{33} - A_{21}/A_{23}) \end{bmatrix}} = \frac{\bigtriangleup\limits_{i} b'_i/A'_{i1}}{\bigtriangleup\limits_{i} A'_{i2}/A'_{i1}} \tag{2.15}$$

um so x_2 zu ermitteln.

$$x_2 = \frac{(b_3/A_{33} - b_2/A_{23})/(A_{31}/A_{33} - A_{21}/A_{23}) - (b_2/A_{23} - b_1/A_{13})/(A_{21}/A_{23} - A_{11}/A_{13})}{(A_{32}/A_{33} - A_{22}/A_{23})/(A_{31}/A_{33} - A_{21}/A_{23}) - (A_{22}/A_{23} - A_{12}/A_{13})/(A_{21}/A_{23} - A_{11}/A_{13})} \tag{2.16}$$

Das noch fehlende x_3 erhält man z.B. aus der Gleichung 2.12, indem man durch A'_{i1} teilt

$$x_3 = \frac{\bigtriangleup\limits_{Zeilen} \begin{bmatrix} (b_2/A_{22} - b_1/A_{12})/(A_{21}/A_{22} - A_{11}/A_{12}) \\ (b_3/A_{32} - b_2/A_{22})/(A_{31}/A_{32} - A_{21}/A_{22}) \end{bmatrix}}{\bigtriangleup\limits_{Zeilen} \begin{bmatrix} (A_{23}/A_{22} - A_{13}/A_{12})/(A_{21}/A_{22} - A_{11}/A_{12}) \\ (A_{33}/A_{32} - A_{23}/A_{22})/(A_{31}/A_{32} - A_{21}/A_{22}) \end{bmatrix}} = \frac{\bigtriangleup\limits_{i} b'_i/A'_{i1}}{\bigtriangleup\limits_{i} \left[A'_{i2}/A'_{i1}\right]} \tag{2.17}$$

und danach wie gewohnt die Differenz über die Zeilen bildet.

$$x_3 = \frac{(b_3/A_{32} - b_2/A_{22})/(A_{31}/A_{32} - A_{21}/A_{22}) - (b_2/A_{22} - b_1/A_{12})/(A_{21}/A_{22} - A_{11}/A_{12})}{(A_{33}/A_{32} - A_{23}/A_{22})/(A_{31}/A_{32} - A_{21}/A_{22}) - (A_{23}/A_{22} - A_{13}/A_{12})/(A_{21}/A_{22} - A_{11}/A_{12})} \tag{2.18}$$

Zur Kontrolle muss man die ermittelten x_j in das Ursprungsgleichungssystem 2.4 einsetzen. Mit Hilfe eines Programms, das symbolisch rechnen kann, ist es heutzutage möglich, die Korrektheit des Ergebnisses durch Matrixmultiplikation recht schnell zu verifizieren, deshalb wird hier auf weitere Erläuterungen dazu verzichtet.
Dieses Beispiel zeigt, wie man auf quasi beliebigem Wege an jedes gesuchte x_j gelangen kann. Es scheint jedoch so, als wäre der Aufwand recht hoch, da man mehr oder weniger jedes mal erneut vom Beginn anfangen muss. Erkennbar ist lediglich, dass bereits berechnete Zwischenergebnisse genutzt werden können, um weitere x_j zu ermitteln. Da in der Praxis generell alle x_j von Interesse sind, soll im nachfolgenden Abschnitt gezeigt werden, wie die allgemeine Vorgehensweise hierfür aussehen sollte.

2.2 Allgemeine Matrixdivision

Im Abschnitt 2.1 wird die grundlegende Vorgehensweise bzw. die Grundstruktur des Algorithmus der Matrixdivision vorgestellt. Die Berechnung aller x_j ist so jedoch mit einem hohen Gesamtaufwand verbunden. Folgend soll eine abgewandelte Darstellung gewählt werden (diesmal vereinfacht ohne Δ-Zeichen) und darauf beruhend der Schluss auf den Gaußalgorithmus erfolgen. Beginnend mit der allgemeinen Form

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

erfolgt nun anders als im behandelten Vorabbeispiel eine programmatisch konsequentere Vorgehensweise. Man dividiert zuerst durch die erste Spalte, also durch den Vektor A_{i1},

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} b_1/A_{11} \\ b_2/A_{21} \\ b_3/A_{31} \\ \vdots \\ b_n/A_{n1} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A_{11}/A_{11} & A_{12}/A_{11} & \dots & A_{1n}/A_{11} \\ A_{21}/A_{21} & A_{22}/A_{21} & \dots & A_{2n}/A_{21} \\ A_{31}/A_{31} & A_{32}/A_{31} & \dots & A_{3n}/A_{31} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}/A_{n1} & A_{n2}/A_{n1} & \dots & A_{nn}/A_{n1} \end{bmatrix}} \tag{2.20}$$

und bildet dann die Differenzen über die Zeilen. In der ersten Spalte unter dem Bruchstrich wird klar, dass diese Spalte beim „Differenzieren“ komplett Null wird. So, wie es auch beim Gauß-Verfahren das Ziel ist. Außerdem soll diesmal die ursprüngliche erste Zeile aus

Gleichung 2.19 erhalten bleiben, sodass man folgende Darstellung bekommt:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2/A_{21} - b_1/A_{11} \\ b_3/A_{31} - b_2/A_{21} \\ \vdots \\ b_n/A_{n1} - b_{(n-1)}/A_{(n-1)1} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22}/A_{21} - A_{12}/A_{11} & \dots & A_{2n}/A_{21} - A_{1n}/A_{11} \\ 0 & A_{32}/A_{31} - A_{22}/A_{21} & \dots & A_{3n}/A_{31} - A_{2n}/A_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & A_{n2}/A_{n1} - A_{(n-1)2}/A_{(n-1)1} & \dots & A_{nn}/A_{n1} - A_{(n-1)n}/A_{(n-1)1} \end{bmatrix}} \tag{2.21}$$

Man erhält also eine Untermatrix $\boldsymbol{A'}$, die ab Zeile 2 und Spalte 2 erkennbar ist. Genauso ist im Vektor $\boldsymbol{b}$ ein Untervektor $\boldsymbol{b'}$ ab Zeile 2 entstanden.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_n \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A'_{22} & A'_{23} & \dots & A'_{2n} \\ 0 & A'_{32} & A'_{33} & \dots & A'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & A'_{n2} & A'_{n3} & \dots & A'_{nn} \end{bmatrix}} \tag{2.22}$$

Die obigen Schritte wiederholt man nun mit der Untermatrix und dem Untervektor, man teilt also zuerst den Untervektor $\boldsymbol{b'}$ sowie alle Spalten der entstandenen Untermatrix $\boldsymbol{A'}$ durch die 1 Spalte dieser Untermatrix

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2/A'_{22} \\ b'_3/A'_{32} \\ \vdots \\ b'_n/A'_{n2} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A'_{22}/A'_{22} & A'_{23}/A'_{22} & \dots & A'_{2n}/A'_{22} \\ 0 & A'_{32}/A'_{32} & A'_{33}/A'_{32} & \dots & A'_{3n}/A'_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & A'_{n2}/A'_{n2} & A'_{n3}/A'_{n2} & \dots & A'_{nn}/A'_{n2} \end{bmatrix}} \tag{2.23}$$

und „differenziert“ danach zwischen den Zeilen. Die ursprüngliche Zeile 1 der Untermatrix und des Untervektors lässt man wieder stehen.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b'_3/A'_{32} - b'_2/A'_{22} \\ \vdots \\ b'_n/A'_{n2} - b'_{(n-1)}/A'_{(n-1)2} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A'_{22} & A'_{23} & \dots & A'_{2n} \\ 0 & 0 & A'_{33}/A'_{32} - A'_{23}/A'_{22} & \dots & A'_{3n}/A'_{32} - A'_{2n}/A'_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & A'_{n3}/A'_{n2} - A'_{(n-1)3}/A'_{(n-1)2} & \dots & A'_{nn}/A'_{n2} - A'_{(n-1)n}/A'_{(n-1)2} \end{bmatrix}} \tag{2.24}$$

Erneut entstehen ein Untervektor $\boldsymbol{b}''$ und eine Untermatrix $\boldsymbol{A}''$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ \vdots \\ b''_n \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A'_{22} & A'_{23} & \dots & A'_{2n} \\ 0 & 0 & A''_{33} & \dots & A''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & A''_{n3} & \dots & A''_{nn} \end{bmatrix}} \tag{2.25}$$

Man kann somit einen Algorithmus herleiten, der durch Division und Differenz eine obere

Dreiecksmatrix bildet.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{(n-1)} \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} b_1 \\ b'_2 \\ b''_3 \\ \vdots \\ b^{(n-2)}_{(n-1)} \\ b^{(n-1)}_n \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1(n-1)} & A_{1n} \\ 0 & A'_{22} & A'_{23} & \dots & A'_{2(n-1)} & A'_{2n} \\ 0 & 0 & A''_{33} & \dots & A''_{3(n-1)} & A''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & A^{(n-2)}_{(n-1)(n-1)} & A^{(n-2)}_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A^{(n-1)}_{nn} \end{bmatrix}} \tag{2.26}$$

Schlussendlich wird ersichtlich, dass die hier definierte Matrixdivision im Prinzip den Gaußalgorithmus widerspiegelt. Mehr noch, man sieht, dass die Lösung eines linearen Gleichungssystems eine Art numerische Ableitung darstellt, da man zwischen den Gleichungen solange differenziert, bis man beim Endergebnis angelangt ist. Der Grad der maximalen Ableitung ist äquivalent zum Rang der Matrix. Das bedeutet, eine Matrix stellt eine multi-lineare bzw. nicht-lineare Funktion (genauer ein Polynom) dar. Eine eindeutige Lösung durch Matrixdivision existiert genau dann, wenn diese Funktion $(n-1)$-mal nicht-trivial differenzierbar bzw. ableitbar ist und die Matrix somit vollen Rang hat, also $rang(\boldsymbol{A}) = n$.

Mit der entstandenen oberen Dreiecksmatrix kann abschließend durch Rückwärtseinsetzen der gesamte Vektor x_j aufgelöst werden. Man erhält also in umgekehrter Reihenfolge nacheinander:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{(n-1)} \\ \vdots \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^{(n-1)}_n / A^{(n-1)}_{nn} \\ (b^{(n-2)}_{(n-1)} - A^{(n-2)}_{(n-1)n} \cdot x_n) / A^{(n-2)}_{(n-1)(n-1)} \\ \vdots \\ (b''_3 - A''_{3n} \cdot x_n - A''_{3(n-1)} \cdot x_{(n-1)} - \dots) / A''_{33} \\ (b'_2 - A'_{2n} \cdot x_n - A'_{2(n-1)} \cdot x_{(n-1)} - \dots - A'_{23} \cdot x_3) / A'_{22} \\ (b_1 - A_{1n} \cdot x_n - A_{1(n-1)} \cdot x_{(n-1)} - \dots - A_{13} \cdot x_3 - A_{12} \cdot x_2) / A_{11} \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

Das Rückwärtseinsetzen bewirkt eine Aufteilung der Gesamtlösung in eine Matrixdivision (Matrixteil unterhalb der Diagonalen) und eine anschließende Matrixmultiplikation (Matrixteil oberhalb der Diagonalen). Dies teilt dementsprechend auch den Rechenaufwand auf und reduziert ihn drastisch, da die Matrixmultiplikation deutlich weniger aufwändig ist als die Matrixdivision. Zur Erinnerung, wenn man alle x_j durch Matrixdivision ermitteln wollte, müsste man rotationsweise die Spalten der Matrix $\boldsymbol{A}$ vertauschen und $(n-1)$-mal die Matrixdivision wiederholen, damit bei jeder Neuberechnung ein anderes x_j ermittelt wird. Dies wurde im Kapitel 2.1 ausreichend diskutiert. Siehe zur Verdeutlichung auch

den Matlab-Code im Anhang 4.1.
Es bleibt noch zu erwähnen, dass bei der praktischen Anwendung der Matrixdivision selbstverständlich eine Teilung durch Null vorkommen kann, weshalb man entsprechende Vorsichtsmaßnahmen beim Programmieren vorsehen muss. Beim Programmieren kann man außerdem leicht feststellen, dass sich der Algorithmus für die Matrixdivision durch kleine Änderungen in den Gaußalgorithmus überführen lässt und umgekehrt. Vergleiche dazu den Pseudo-Code im Wikipedia Artikel zum Gaußschen Eliminationsverfahren [1] und den Matlab-Code im Anhang 4.2.

2.3 Behandlung rechteckiger Matrizen

Zur Vervollständigung der Matrixdivision muss noch kurz diskutiert werden, was passiert, wenn anders als im Kapitel 2.2 angenommen, die Matrix keine quadratische Form sondern eine rechteckige Form aufweist oder keinen vollen Rang hat.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

Falls $m > n$ bedeutet dies, man kann öfter Differenzen bilden als dividieren, weil mehr Gleichungen als Unbekannte vorhanden sind. Es gibt also mehr Zeilen als Spalten, ein sogenanntes Überbestimmtes System. Für mehr Infos siehe hierzu die Webseite von Dankert/Dankert [2] oder die Youtube Videos von Gilbert Strang [3].
In der Praxis entstehen solche Gleichungssysteme z.B. durch Annahme einer Funktion mit n Unbekannten für einen Zusammenhang, der in Wahrheit komplexer ist. Zum Ausgleich sammelt man mehr Testwerte m und löst das Gleichungssystem mit Hilfe kleinster Fehlerquadrate. Beim Einsetzen der Näherungslösung in die Ursprungsgleichung kann man dann die einzelnen Abweichungen bzw. Fehler zum ursprünglichen Vektor $\boldsymbol{b}$ feststellen. Darauf basierend kann man entscheiden, ob die zugrunde gelegte Funktion für die eigenen Zwecke ausreichend genau ist und sie gegebenenfalls anpassen.
Alternativ könnte man das Gleichungssystem mit der Matrixdivision nur soweit lösen, wie die darin enthaltene quadratische Matrix mit $rang(\boldsymbol{A}) = n$ erlaubt. Wenn dann die restlichen Zeilen i mit $m \geq i > n$ im Vektror $\boldsymbol{b}$ nicht Null geworden sind, ist klar, dass die zugrunde gelegte Funktion zu wenig Unbekannte besitzt. Man könnte so eine erste Lösung definieren, bei der ein Fehler in Kauf genommen wird, den man dann bei der Lösung mit angeben müsste. Diese Lösung löst die ersten n Zeilen exakt. Die restlichen Zeilen offenbaren dann den nicht auflösbaren Fehler, ähnlich wie bei einer Skalardivision, bei der anstelle von Nachkommastellen ein ungelöster Rest angegeben wird.

Falls $n > m$ bedeutet dies, man kann nicht so oft Differenzen bilden, wie man teilen kann, weil weniger Gleichungen als Unbekannte vorhanden sind. Es gibt also weniger Zeilen als Spalten, ein sogenanntes Unterbestimmtes System.
In diesem Fall gibt es unendlich viele Lösungen, von denen man die trivialste als erste Lösung heranziehen könnte. Man würde das Gleichungssystem also solange auflösen, wie

die darin enthaltene quadratische Matrix mit $rang(\boldsymbol{A}) = m$ erlaubt. Die überschüssigen Spalten j mit $n \geq j > m$ müsste man ausschließen bzw. die entsprechenden x_j nullsetzen. Dadurch erhält man eine wohldefinierte exakte Lösung, die eine durchaus sinnvolle Verwendung finden kann.

3 Fazit

Die in dieser Arbeit definierte Matrixdivision enthüllt sicherlich keine allzu großen neuen Erkenntnisse, jedoch könnte damit die Einigung einhergehen, dass die Matrixdivision nachweisbar existiert und wir sie implizit schon immer mit Hilfe des Gaußalgorithmus anwenden. Auch wenn Form und Rang der Matrix darüber entscheiden, wie genau das Ergebnis aussieht und inwiefern es weiterverwendbar ist.

4 Anhang

Die folgenden Code-Beispiele sind die Umsetzung der Matrixdivision. Sie sollen der Verifizierung und zu Vergleichszwecken dienen.

4.1 Matlab-Code: Matrixdivision (original)

```
function [x] = mdiv(A,b)
% Achtung: Für symbolische Berechnung geeignet,
% aber Nulldivision möglich!

% Eingabe:
    % A   % Matrix A
    % b   % Vektor b

% Ausgabe:
    % x   % Lösungsvektor x

% Algorithmus:
    x = b;
    n = length(b);
    for i = 1 : n
            R = [A, b];
            S = R(:, n); R(:, n) = R(:, i); R(:, i) = S;   % Spaltenvertauschung
            for j = 1 : n
                for k = 2 : n - j + 2
                    R(:, k) = R(:, k)./R(:, 1);
                end

                % Systemreduktion
                R = R(:, 2 : k);
                if length(R) > 1
                    R = diff(R);
                else
                    x(i) = R;
                end
            end
    end

return
```

4.2 Matlab-Code: Matrixdivision (optimiert)

```
function [x] = mdiv(A,b)
% Achtung: Für symbolische Berechnung geeignet,
% aber Nulldivision möglich!

% Eingabe:
    % A   % Matrix A
    % b   % Vektor b

% Ausgabe:
    % x   % Lösungsvektor x

% Algorithmus:
    R = [A, b];
    n = length(b);
    for j = 1 : n - 1
            for i = n : -1 : j + 1
              R(i,:) = R(i,:)/R(i,j) - R(i-1,:)/R(i-1,j);
            end
    end

    % Rückwärtseinsetzen
    b = R(:, n + 1);
    x = b;
    for i = n : -1 : 1
            x(i) = (b(i) - R(i, n : -1 : i + 1) * x(n : -1 : i + 1))./R(i,i);
    end

return
```

Literatur

[1] Wikipedia: *Gaußsches Eliminationsverfahren* | www.wikipedia.org

[2] Dankert/Dankert: *Mathematik für die Technische Mechanik* | www.tm-mathe.de

[3] Gilbert Strang: *MIT 18.06 Linear Algebra, Spring 2005* | www.youtube.com